



DEĞİŞKEN SERTLİĞE SAHİP KOMPOZİT KUTU KİRİŞLERİN GERİLME ANALİZİ

M. Gökhan GÜNAY¹, Taner TIMARCI²

^{1,2}Makine Mühendisliği Bölümü, Trakya Üniversitesi, Edirne.

ABSTRACT

Stress analysis of thin-walled composite laminated box beams having variable stiffness is realized in this study based on an analytical model accounting for flexural-torsional coupling and warping effects. The variable stiffness of the beam is acquired by constructing laminates with curvilinear fibers having certain specific paths. The orientation of fibers varies by depending on these fiber paths defined along the contour of the cross-section in each layer. Governing equations are obtained by using the principle of minimum total potential energy. A displacement based finite element method is used to solve the analytical model and to calculate the distributions of axial and transverse shear stresses along the cantilever composite beam loaded at its free end. Numerical results are obtained and presented for different fiber paths and lay-up configurations also compared with the solutions of a finite element analysis software using shell elements.

ÖZET

Bu çalışmada değişken sertliğe sahip ince-cidarlı katmanlı kompozit kutu kirişlerin gerilme analizi, eğilme-burulma bağılıklığını ve çarpılma etkisini hesaba katan analitik bir model temelinde gerçekleştirilmiştir. Kirişin değişken sertliği, katmanlarda belirli bir yolu takip eden, eğrisel elyaflar kullanılarak elde edilmiştir. Her bir katmandaki elyafların yönlenmesi kesit konturu boyunca tanımlanmış elyaf yoluna bağlı olarak değişmektedir. Yönetici denklemler minimum potansiyel enerji ilkesi kullanılarak elde edilmiştir. Analitik modeli çözmek ve serbest ucundan yüklenmiş ankastre bir kirişin eksenel ve kayma gerilme dağılımlarını hesaplamak için yer değiştirme tabanlı sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Sayısal sonuçlar farklı elyaf yolları ve katman yerleşimleri için elde edilmiş ve sunulmuş ayrıca kabuk elemanların kullanıldığı bir sonlu elemanlar analiz yazılımı ile elde edilenler ile karşılaştırılmıştır.

GİRİŞ

İnce cidarlı kompozit katmanlı kirişler birçok mühendislik uygulamasında yapı elemanı olarak yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Kompozit malzemelerden yapılmış yapılar, geleneksel malzemeli yapılara göre yüksek özgül modülüs ve dayanım gibi özelliklerinden dolayı birçok avantaja sahiptir. Sürekli elyaflı kompozit katmanlı yapıların bir önemli avantajı uygulama alanlarının gerektirdiği tasarım gereksinimlerine göre katmanların sıralanışının ve kalınlıklarının, ayrıca katmanlardaki elyaf yönlenmelerinin değiştirilmesine olanak sağlamasıdır. Birçok uygulamada olduğu gibi düz sürekli elyafların kullanımının

yerine katmanlarda eğrisel elyafların kullanılması kompozit katmanlı yapıya diğer faydalı bir özellik, ek bir tasarım esnekliği sağlar.

İnce cidarlı izotropik yapıların teorisi ilk olarak Vlasov [1] ve Gjelsvik [2] tarafından geliştirilmiştir. Değişken sertlik kavramı levha ve silindirik kompozit yapılarda yaygın olarak kullanılmasına karşın ince-cidarlı kirişlerin analizinde kullanılması daha azdır. Gürdal ve Olmedo [3] dikdörtgen kompozit plaklarda sertliği değiştirmek için eğrisel elyafları kullandılar ve kapalı bir formülasyon ayrıca sayısal çözümler elde ettiler. Zamani ve ark. [4] ikili-içbükey dik kesite sahip ince-cidarlı kirişlerin optimizasyonunda eğrisel elyafları kullandılar. Bu çalışmada değişken sertliğe sahip katmanlı kompozit kutu kirişlerin gerilme analizi yapılmıştır. Çalışmada Librescu ve Song'un çalışması [5] temel alınmış, ince-cidarlı kapalı kesitli kompozit bir kiriş için eğilme-burulma bağılaşıklığını ve çarpılma etkisini hesaba katan analitik bir model geliştirilmiştir. Yapıda değişken sertlik oluşturulurken, doğrusal olarak değişen elyaf yönlenmesinin tanımlanması Gürdal'ın formülasyonuna [3] benzer şekilde kullanılmıştır. Yönetici denklemler minimum potansiyel enerji ilkesi kullanılarak elde edilmiştir. Analitik modeli çözmek, kirişin eksenel ve kayma gerilmelerini hesaplamak için, Vo ve Lee'nin çalışmasına [6] paralel olarak, yer değiştirme tabanlı sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Sayısal sonuçlar farklı elyaf hatları için elde edilmiş ve bu sonuçlar kabuk elemanların kullanıldığı bir sonlu elemanlar paket programı ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Bazı konfigürasyonlar ve yükleme durumu için, ankastre bir kirişte eksenel gerilme dağılımları sunulmuştur.

FORMÜLASYON

Varsayımlar

Kinematik model geliştirilirken aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır.

- (i) Kiriş kesiti deformasyon esnasında kendi düzleminde şeklini korumaktadır, sadece kendi düzlemine dik doğrultuda çarpılma davranışı yapmasına izin verilmiştir.
- (ii) Deformasyon öncesinde orta düzleme dik olan doğrular, deformasyon sonrasında da orta düzleme dik kalırlar.
- (iii) Kirişin cidar kalınlığının, kirişin herhangi bir yerinde oluşan eğriliğe oranı ihmal edilebilecek kadar küçüktür.
- (iv) Kesit çevresi boyunca oluşan σ_s gerilmesi, eksenel gerilme σ_z 'ye göre ihmal edilebilir.
- (v) Yanal γ_{xz} ve γ_{yz} kayma genlemeleri hesaplamaya dâhil edilmemiştir.

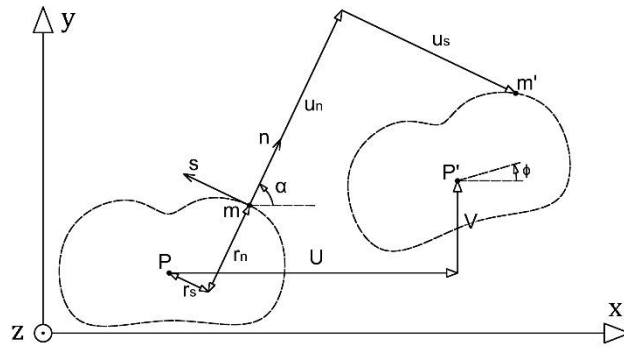
Yer Değiştirme Alanı

Kullanılan koordinat sistemleri ve yer değiştirmeler Şekil 1'de verilmiştir. İlk koordinat sistemi global kartezyen (x,y,z), ikincisi ise (n,s,z) yerel ortogonal eğrisel koordinat sistemidir. Bu iki koordinat sistemi yönlenme açısı α ile ilişkilendirilir. z-ekseni kirişin ekseni boyunca. U ve V kutup noktası $P(x_p, y_p)$ 'nin global koordinat sistemindeki yer değiştirmeleri, Φ ise kesitin P noktası etrafındaki dönmesidir. Orta düzlem üzerindeki herhangi bir m(x,y) noktasının yer değiştirmeleri yerel koordinatlarda, $P(x_p, y_p)$ noktasının yer değiştirmeleri cinsinden aşağıdaki gibi hesaplanır [5]:

$$\bar{u}_n(s, z) = U(z) \cdot \frac{dy}{ds} - V(z) \cdot \frac{dx}{ds} - \phi(z) \cdot r_s(s)$$

$$\bar{u}_s(s, z) = U(z) \cdot \frac{dx}{ds} + V(z) \cdot \frac{dy}{ds} + \phi(z) \cdot r_n(s)$$

$$\bar{w}(s, n, z) = W_0(z) - U'(z) \cdot x(s) - V'(z) \cdot y(s) - \phi'(z) \cdot \bar{w}(s)$$



Şekil 1. Koordinat sistemleri ve orta düzlem üzerindeki herhangi bir m noktasının yer değiştirmeleri

Burada W_0 kesitin ortalama aksenal yer değiştirmesidir, $\bar{w}(s)$ birincil çarpılma fonksiyonu, $r_s(s)$ ve $r_n(s)$ ise m-noktası ile P-noktası arasındaki mesafenin yerel koordinatlardaki bileşenleridir. Benzer şekilde orta düzlem dışında bulunan herhangi bir $M(x_M, y_M)$ noktasının yer değiştirmeleri yerel koordinatlarda aşağıdaki gibi hesaplanır [5]:

$$U_n(s, n, z) = U(z) \cdot \frac{dy}{ds} - V(z) \cdot \frac{dx}{ds} - \phi(z) \cdot R_s(s, n)$$

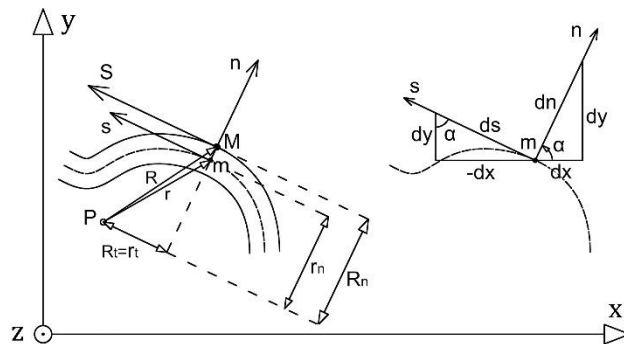
$$U_s(s, n, z) = U(z) \cdot \frac{dx}{ds} + V(z) \cdot \frac{dy}{ds} + \phi(z) \cdot R_n(s, n)$$

$$W(s, n, z) = W_0 - U'(z) \cdot \left(x(s) + n \cdot \frac{dy}{ds} \right) - V'(z) \cdot \left(y(s) - n \cdot \frac{dx}{ds} \right) - \phi'(z) \cdot [\bar{w}(s) + n \cdot \bar{w}'(s)]$$

Burada $\bar{w}(s)$ ikincil çarpılma fonksiyonu, $R_s(s)$ ve $R_n(s)$ ise Şekil 2'de gösterildiği gibi M-noktası ile P-noktası arasındaki mesafenin yerel koordinatlardaki bileşenleridir ve $r_s(s)$ ve $r_n(s)$ cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$R_n(s, n) = r_n(s) + n$$

$$R_s(s, n) = r_s(s)$$



Şekil 2. Orta düzlem dışındaki herhangi bir M noktasının, P noktası ile ilişkisi

Birincil ve ikincil çarpılma fonksiyonlarının tanımları aşağıda verilmiştir:

$$\bar{w}(s) = \int_0^s \left(r_n - \frac{2\Omega}{h(s) \cdot G_{sz}(s) \cdot \mathcal{L}} \right) \cdot ds$$

$$\bar{w}(s) = \int_0^s \left(2 - \frac{2\beta}{h(s).G_{sz}(s).\mathcal{L}} \right) . ds - r_s(s)$$

Burada $h(s)$ kiriş kesitinin kalınlığıdır, $G_{sz}(s)$ ise etkin kayma sertliğidir. 2Ω , β ve \mathcal{L} ise aşağıda tanımlandığı gibi sabit terimlerdir:

$$2\Omega = \oint r_n(s) . ds \quad \beta = \oint ds \quad \mathcal{L} = \oint \frac{ds}{h(s).G_{sz}(s)}$$

İnce cidarlı katmanlı kompozit bir kiriş için etkin kayma sertliği aşağıdaki gibi hesaplanır [7]:

$$G_{sz}(s) = \frac{1}{h(s)} \cdot \left[a_{66}(s) - \frac{a_{16}(s)^2}{a_{11}(s)} \right]$$

Burada $a_{ij}(s)$ kompozit laminanın modifiye edilmiş sertliklerdir.

Genleme Alanı

Düzlem-içi genlemeler ihmal edildiğinden, eksenel genleme ve yanal kayma genlemeleri küçük yer değiştirmeler kabulü ile aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{dW}{dz} \\ \varepsilon_{zz} &= W_0' - U'' \left(x + n \cdot \frac{dy}{ds} \right) - V'' \left(y - n \cdot \frac{dx}{ds} \right) - \phi'' \cdot w(s, n) \\ \gamma_{sz} &= \frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial U_s}{\partial z} \\ \gamma_{sz} &= \frac{2\Omega}{h(s).G_{sz}(s).\mathcal{L}} + n \cdot \frac{2\beta}{h(s).G_{sz}(s).\mathcal{L}} \\ \gamma_{nz} &= \frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial U_n}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Burada $()'$ z 'ye göre türevi ifade etmektedir. ε_{zz} ve γ_{sz} genlemeleri orta düzlem genlemeleri $()^{(0)}$ ve orta düzlem eğrilikleri $()^{(1)}$ olmak üzere aşağıdaki gibi ikiye ayrılabilir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz}^{(0)} + n \cdot \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(0)} &= w_0' - U'' \cdot x - V'' \cdot y - \phi'' \cdot \bar{w}(s) \quad \varepsilon_{zz}^{(1)} = -U'' \cdot \frac{dy}{ds} + V'' \cdot \frac{dx}{ds} - \phi'' \cdot \bar{w}'(s) \\ \gamma_{sz} &= \gamma_{sz}^{(0)} + n \cdot \gamma_{sz}^{(1)} \\ \gamma_{sz}^{(0)} &= \frac{2\Omega}{h(s).G_{sz}(s).\mathcal{L}} \quad \gamma_{sz}^{(1)} = \frac{2\beta}{h(s).G_{sz}(s).\mathcal{L}} \end{aligned}$$

Denge Denklemleri

Kirişin denge denklemleri, toplam potansiyel enerjinin varyasyonunu sıfıra eşitleyerek bulunur:

$$\begin{aligned} N_z' + q_z &= 0 \\ M_y'' + q_x &= 0 \\ M_x'' + q_y &= 0 \\ M_{wz}'' + M_z' + m_z &= 0 \end{aligned}$$

Burada, q_x , q_y ve q_z dış kuvvetlerdir. Kiriş kuvvetleri ve momentleri,

$$\begin{aligned}
 N_z &= \int_c N_{zz}(s) \cdot ds \\
 M_x &= \int_c y \cdot N_{zz}(s) + L_{zz}(s) \cdot \frac{dx}{ds} ds \\
 M_y &= \int_c x \cdot N_{zz}(s) - L_{zz}(s) \cdot \frac{dy}{ds} ds \\
 M_\omega &= \int_c N_{zz}(s) \cdot \bar{\omega}(s) - L_{zz}(s) \cdot \bar{\omega}'(s) ds \\
 M_z &= \int_c N_{sz}(s) \cdot \frac{2\Omega}{h(s) \cdot G_{sz}(s) \cdot \mathcal{L}} - L_{sz}(s) \cdot \frac{2\beta}{h(s) \cdot G_{sz}(s) \cdot \mathcal{L}} ds
 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. $N_{ab}(s)$ ve $L_{ab}(s)$ kalınlık boyunca kabuk gerilme bileşenleri ve moment çiftleridir.

$$\begin{aligned}
 N_{ab}(s) &= \sum_k^N \int_{n,k-1}^{n,k} \sigma_{ab}^{(k)} dn \quad (a,b = s,z) \\
 L_{ab}(s) &= \sum_k^N \int_{n,k-1}^{n,k} n \cdot \sigma_{ab}^{(k)} dn \quad (a,b = s,z)
 \end{aligned}$$

Bünye Denklemleri

Kabuk gerilme bileşenleri ve moment çiftleri ile orta düzlem genlemeleri ve eğrilikleri arasındaki ilişkiler, varsayım (iv)'e göre $N_{ss}(s)$ ve $L_{ss}(s)$ terimleri ihmal edildiğinde yeni modifiye edilmiş bünye denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} N_{zz}(s) \\ N_{sz}(s) \\ L_{zz}(s) \\ L_{sz}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{16}(s) & b_{11}(s) & b_{16}^a(s) \\ a_{16}(s) & a_{66}(s) & b_{16}^b(s) & b_{66}(s) \\ b_{11}(s) & b_{16}^b(s) & d_{11}(s) & d_{16}(s) \\ b_{16}^a(s) & b_{66}(s) & d_{16}(s) & d_{66}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{zz}^{(0)} \\ \gamma_{sz}^{(0)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ \gamma_{sz}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$a_{ij}(s)$, $b_{ij}(s)$ ve $d_{ij}(s)$ modifiye edilmiş sertlik terimleri, s-eksenine bağlı olarak değişen A, B, D rijitlik matrislerinin elemanları cinsinden ifade edilir. Bazılarının açık şekli aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 a_{11}(s) &= A_{11}(s) - \frac{1}{\Delta_{22}} [A_{12}(s)^2 \cdot D_{22}(s) - 2 \cdot A_{12}(s) \cdot B_{12}(s) \cdot B_{22}(s) + A_{22}(s) \cdot B_{12}(s)^2] \\
 b_{11}(s) &= B_{11}(s) - \frac{1}{\Delta_{22}} [A_{12}(s) \cdot B_{12}(s) \cdot D_{22}(s) - B_{22}(s) \{B_{12}(s)^2 + A_{12}(s) \cdot D_{12}(s)\} + A_{22}(s) \cdot B_{12}(s) \cdot D_{12}(s)] \\
 d_{11}(s) &= D_{11}(s) - \frac{1}{\Delta_{22}} [D_{12}(s)^2 \cdot A_{22}(s) - 2 \cdot D_{12}(s) \cdot B_{12}(s) \cdot B_{22}(s) + D_{22}(s) \cdot B_{12}(s)^2] \\
 \Delta_{22} &= A_{22}(s) \cdot D_{22}(s) - B_{22}(s)^2
 \end{aligned}$$

Kiriş kuvvetleri ve momentleri ile P-noktasının yer değiştirme terimleri arasındaki bağıntılar ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ M_\omega \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} \\ & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} \\ & & e_{33} & e_{34} & e_{35} \\ & sym & & e_{44} & e_{45} \\ & & & & e_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_0' \\ -U'' \\ -V'' \\ -\phi'' \\ \phi' \end{bmatrix}$$

Burada $[e_{ij}]$ kiriş sertlik matrisinin elemanlarının bazılarının açık şekli aşağıda verilmiştir:

$$e_{11} = \int_s a_{11}(s) \cdot ds$$

$$e_{12} = \int_s \left(a_{11}(s) \cdot x(s) + b_{11}(s) \cdot \frac{dy}{ds} \right) \cdot ds$$

$$e_{13} = \int_s \left(a_{11}(s) \cdot y(s) - b_{11}(s) \cdot \frac{dx}{ds} \right) \cdot ds$$

$$e_{14} = \int_s \frac{1}{h(s) \cdot G_{sz}(s)} \left(a_{16}(s) \cdot \frac{2\Omega}{L} + b_{16}^a(s) \cdot \frac{2\beta}{L} \right) \cdot ds$$

$[e_{ij}]$ kiriş sertlik matrisinin diyagonal elemanları sırasıyla z-ekseni yönündeki uzama, y ve x-eksenlerindeki eğilme, z-eksenindeki çarpılma ve burulma sertlikleridir. Diğer elemanlar bir birine bağlı davranışların sertlik terimleridir. Bünye denklemleri daha önce elde edilen denge denklemlerinde yerine konulursa, denge denklemleri $[e_{ij}]$ terimleri ve P-noktasının yer değiştirmeleri cinsinden aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} e_{11} \cdot W_0^u - e_{12} \cdot U^{uu} - e_{13} \cdot V^{uu} - e_{14} \cdot \phi^{uu} + e_{15} \cdot \phi^u + q_z &= 0 \\ e_{12} \cdot W_0^{uu} - e_{22} \cdot U^{iv} - e_{23} \cdot V^{iv} - e_{24} \cdot \phi^{iv} + e_{25} \cdot \phi^{uu} + q_x &= 0 \\ e_{13} \cdot W_0^{uu} - e_{23} \cdot U^{iv} - e_{33} \cdot V^{iv} - e_{34} \cdot \phi^{iv} + e_{35} \cdot \phi^{uu} + q_y &= 0 \\ e_{14} \cdot W_0^{uu} + e_{15} \cdot W_0^u - e_{24} \cdot U^{iv} - e_{25} \cdot U^{uu} - e_{34} \cdot V^{iv} - e_{35} \cdot V^{uu} \\ - e_{44} \cdot \phi^{iv} + 2e_{45} \cdot \phi^{uu} + e_{55} \cdot \phi^u + m_z &= 0 \end{aligned}$$

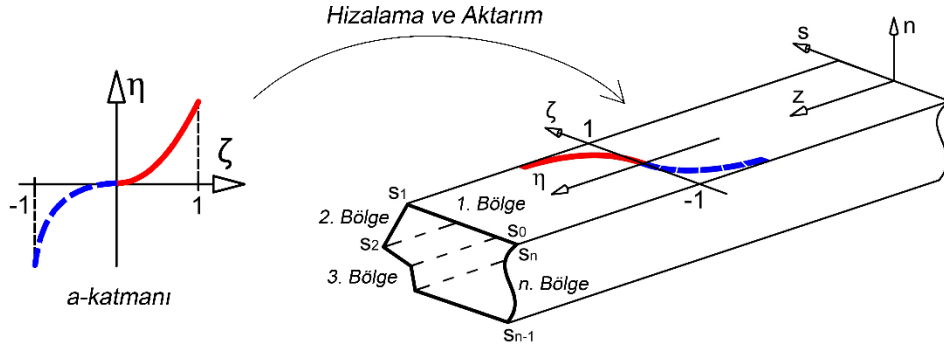
Değişken Sertlik Tanımı

Elyaf katmanlarda eğrisel bir yolu takip edecek şekilde yerleştirilerek, elyafların yönelim açıları ve böylece katmanın sertlikleri de değişken olacaktır. Değişken sertliğe sahip katmanlardan oluşan kirişleri tanımlamak için asit bir prosedür geliştirilmiştir. Bu prosedüre göre değişken sertliğe sahip katmanlar önce ζ - ve η -eksenlerinin sırasıyla s-ve z-eksenlerine karşılık geldiği $\zeta - \eta$ düzleminde tanımlanmakta ve her bir katmana özel bir isim verilmektedir. Daha sonra tanımlanacak bu katmanlar kirişin istenilen bölgesine Şekil 3'de gösterildiği gibi aktarılmaktadır. Değişken sertliğe sahip katmanların elyaf yönelim açılarının değişimi Gürdal ve Olmedo'nun [3] formülasyonuna benzer şekilde lineer integrasyon kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\theta(\zeta) = \begin{cases} (\theta_1 - \theta_0) \cdot \zeta + \theta_1, & -1 \leq \zeta \leq 0 \\ (\theta_2 - \theta_1) \cdot \zeta + \theta_1, & 0 < \zeta \leq 1 \end{cases}$$

Bu elyaf yönelim açısını sağlayan eğrisel elyaf yolu $\zeta - \eta$ düzleminde aşağıdaki gibi verilir:

$$\eta(\zeta) = \begin{cases} \frac{-\ln[\cos((\theta_0 - \theta_1) \cdot \zeta + 90 - \theta_1)] + \ln[\cos(90 - \theta_1)]}{\pi \cdot \frac{(\theta_0 - \theta_1)}{180}}, & -1 \leq \zeta \leq 0 \\ \frac{-\ln[\cos((\theta_1 - \theta_2) \cdot \zeta + 90 - \theta_1)] + \ln[\cos(90 - \theta_1)]}{\pi \cdot \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{180}}, & 0 < \zeta \leq 1 \end{cases}$$



Şekil 3. Değişken sertliğe sahip “a” katmanının tanımlanması ve kirişin 1.bölgesine aktarılması

Burada θ_1 orijindeki, θ_0 ve θ_2 ise sırasıyla $\zeta = -1$ ve $\zeta = 1$ 'deki yönelim açılarını gösterir.

Değişken sertlikli katmanların eğrisel elyafların üst üste binmeyecek veya boşluk kalmayacak şekilde η -ekseninde kaydırılarak üretildiği kabul edilmiştir. Bu koşulları sağlayan bir üretim yöntemi (Tow Shearing Method) [8] geliştirilmiştir. Fakat bu yöntemle üretilen katmanların kalınlıkları elyaf yönelim açısının değişimine bağlı olarak değişmektedir. Katmanların kalınlık değişimi aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$h(\zeta) = h_0 / \cos(\theta(\zeta) - \theta_{ref})$$

Burada h_0 katmanın normal kalınlığı, θ_{ref} ise h_0 kalınlığının oluştuğu referans elyaf yönelim açısıdır.

Çizelge 1: Değişken sertlikli a-katmanının tanımları

Katman	θ_0	θ_1	θ_2	h_0	θ_{ref}
a	70	20	70	1	20

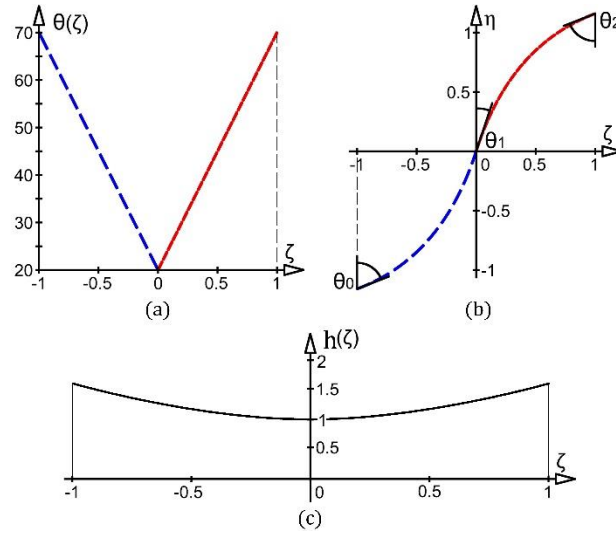
Çizelge 1'deki gibi tanımlanmış olan değişken sertlikli bir a-katmanının elyaf yönelim açısı, elyaf yolu ve kalınlık değişimi Şekil 4'de gösterilmiştir. Değişken sertlikli katmanların tanımlandığı $\zeta - \eta$ düzlemindeki elyaf yönelim eğrisel yollarının s-z düzlemine aktarılabilmesi için farklı iki biçim Çizelge 2'de verilmiştir. Kirişin her bir bölgesi değişken sertliğe sahip katmanlarla tanımlandıktan sonra, $A(s)$, $B(s)$, $D(s)$ rijitlik matrisleri $\theta(s)_k$ ya bağlı olarak klasik laminasyon teorisinde verildiği [9] gibi hesaplanır:

$$A_{ij}(s) = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}(\theta(s)_k) \cdot (n_k(s) - n_{k-1}(s))$$

$$B_{ij}(s) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}(\theta(s)_k) \cdot (n_k^2(s) - n_{k-1}^2(s))$$

$$D_{ij}(s) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}(\theta(s)_k) \cdot (n_k^3(s) - n_{k-1}^3(s))$$

Burada $n_k(s)$ terimleri katmanların kalınlık değişimine bağlı olarak hesaplanır.



Şekil 4. Değişken sertlikli katmanın elyaf yönelim açısı (a), elyaf yönlenim (b) ve kalınlık değişimi (c)

Gerilme Alanı

Statik bir yükleme halinde kirişin herhangi bir k. katmanında oluşan eksenel σ_{zz} ve yanal σ_{sz} kayma gerilmeleri, rijitlik matris elemanlarının bünye denklemleri ve kuvvet-moment tanımlarında kullanılmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{zz}^{(k)} = \bar{Q}_{11}(\theta(s)_k) \cdot \left[(w'_0 - U'' \cdot x - V'' \cdot y - \phi'' \cdot \bar{w}(s)) + n \cdot \left(-U'' \cdot \frac{dy}{ds} + V'' \cdot \frac{dx}{ds} - \phi'' \cdot \bar{w}(s) \right) \right] + \bar{Q}_{16}(\theta(s)_k) \cdot \left[\frac{2\Omega + n \cdot 2\beta}{h(s) \cdot G_{sz}(s) \cdot \mathcal{L}} \right]$$

$$\sigma_{sz}^{(k)} = \bar{Q}_{16}(\theta(s)_k) \cdot \left[(w'_0 - U'' \cdot x - V'' \cdot y - \phi'' \cdot \bar{w}(s)) + n \cdot \left(-U'' \cdot \frac{dy}{ds} + V'' \cdot \frac{dx}{ds} - \phi'' \cdot \bar{w}(s) \right) \right] + \bar{Q}_{66}(\theta(s)_k) \cdot \left[\frac{2\Omega + n \cdot 2\beta}{h(s) \cdot G_{sz}(s) \cdot \mathcal{L}} \right]$$

Çizelge 2. Değişken sertlikli bir a-katmanının, ince-cıdarlı bir kirişin i. bölgesinin k-katmanına aktarılmasının sembolik gösterimi ve formülasyonu

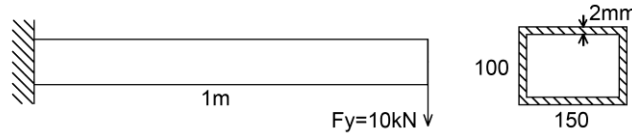
		$\pm a$	$\theta(s)_k = \theta(\zeta)_a$
$-1 \leq \zeta \leq 1$	$s_{i-1} \leq s \leq s_i$		
$s_{i-1} \leq s \leq s_i$			
		$\mp a$	$\theta(s)_k = -\theta(\zeta)_a$
$-1 \leq \zeta \leq 1$	$s_{i-1} \leq s \leq s_i$		
$s_{i-1} \leq s \leq s_i$			

SAYISAL SONUÇLAR

Analitik model her bir düğüm noktası 3 ötelenme 3 dönme ve 1 çarpılma serbestliğine sahip bir kiriş elemanı kullanılarak yer değiştirme tabanlı sonlu elemanlar metodu [6] ile çözülmüş ve kirişin yer değiştirmeleri ve gerilmeleri hesaplanmıştır. Değişken sertliğe sahip iki farklı yönlenme açıları olan, farklı bükülmeli eğrisel yolların takip edildiği katmanlar kullanılarak elde edilen aksel ve kayma gerilme sonuçları, kabuk elemanların (S4) kullanıldığı bir sonlu elemanlar paket programının (Abaqus) sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Kullanılan malzeme özellikleri Çizelge 3'de verilmiştir. 100x150 mm boyutlarındaki bir kutu kiriş Şekil 6'da gösterildiği gibi ankastre olarak mesnetlenmiş ve serbest ucundan düşey 10 kN'luk kuvvet ile yüklenmiştir.

Çizelge 3 . Malzeme Özellikleri

$E_{11}=148 \text{ GPa}$	$E_{22}=9,65 \text{ GPa}$
$G_{12}=4,55 \text{ GPa}$	$\nu_{12}=0,34$



Şekil 6. Kirişin geometrisi ve yükleme hali

Kutu kirişin her bir duvarı Çizelge 4'de tanımlanan katmanlar kullanılarak $[\frac{+}{-}(\cdot)/\frac{+}{-}(\cdot)]_5$ sıralamalı ve 10 katman olacak şekilde oluşturulmuştur. a-katmanı eğriselliğine sahip kirişin orta düzleminde oluşan en büyük ve en küçük σ_{zz} ve σ_{sz} gerilmeleri ile serbest uca y-doğrultusunda oluşan çökmesi Çizelge 5'de verilmiştir.

Çizelge 4. Değişken Sertlikli Katmanların Tanımları

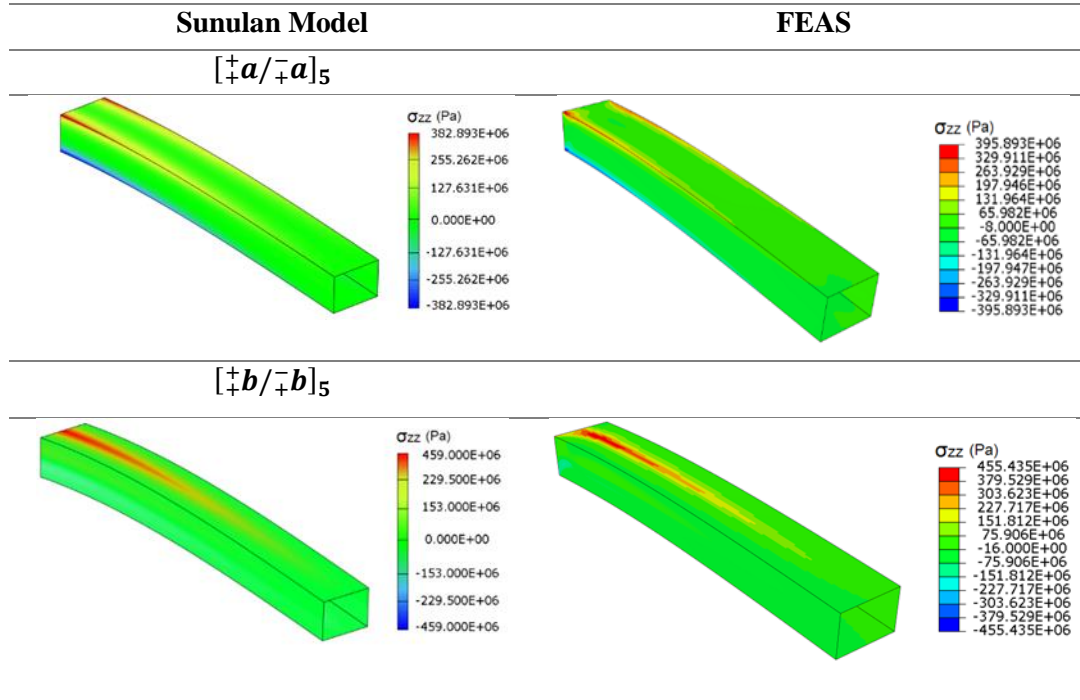
Katman	θ_0	θ_1	θ_2	h_0 (mm)	θ_{ref}
A	20	70	20	0.2	70
B	70	20	70	0.2	20

Çizelge 5. Orta düzlemde oluşan σ_{zz} ve σ_{sz} gerilmeleri ile serbest uca oluşan çökme $[\frac{+}{-}a/\frac{+}{-}a]_5$

Sunulan Model	FEAS
$\sigma_{zz,max}=383\text{MPa}$ $\sigma_{zz,min}=-383\text{MPa}$	$\sigma_{zz,max}=395\text{MPa}$ $\sigma_{zz,min}=-395\text{MPa}$
$\sigma_{sz,max}=29,8\text{MPa}$ $\sigma_{sz,min}=-29,8\text{MPa}$	$\sigma_{sz,max}=30,4\text{MPa}$ $\sigma_{sz,min}=-30,4\text{MPa}$
$V = -0,022 \text{ m}$	$V = -0,022\text{m}$

Çizelge 6'da kirişin orta düzleminde oluşan aksel gerilme dağılımları gösterilmiştir. Aksel gerilmelerin katmanda genel olarak elyaf yönelim açılarının küçük olduğu bölgelerde, a-katman sıralanmasının kullanıldığı kirişte kenarlarda, b-katmanı durumunda ise kirişin duvarlarının ortalarında daha yüksek değerlere sahip olduğu görülmüştür. Geliştirilen matematiksel model ile kutu kirişin farklı katmanlamaları ve eğrisel yolları için hesaplanan maksimum ve minimum gerilme değerleri ile gerilme dağılımlarının, sonlu elemanlar yazılım paketi ile elde edilenlerle tutarlı olduğu gözlenmiştir. Klasik kompozit malzeme tasarımından farklı olarak elyafların yönelim açısı değişiminin istenilen şekilde tasarlanması ile kirişin gerilme dağılımları kontrol edilebilir.

Çizelge 6: Farklı eğriselliğe sahip kirişlerde oluşan σ_{zz} gerilme dağılımları



KAYNAKLAR

- [1] Vlasov VZ. Thin walled elastic beams. 2nd ed. Jerusalem: Israel Program for Scientific Transactions; 1961.
- [2] Gjelsvik A. The theory of thin-walled bars. New York: Wiley; 1981
- [3] Gürdal Z., Olmedo R. In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientations: Variable stiffness concept. AIAA J 31(4), 1993.
- [4] Zamani, Haddadpour, Ghazavi. Curvilinear fiber optimization tools for design thin walled Beams. Thin-Walled Structures 49 (2011) 448–454.
- [5] Librescu L., Song O. Thin-Walled Composite Beams. Springer, 2006.
- [6] Vo T.P., Lee J. Flexural–torsional behavior of thin-walled closed-section composite box beams, Engineering Structures. 2007; 29:1774–82.
- [7] Smith C. Chopra I. Formulation and Evaluation of an Analytical Model for Composite Box-Beams. Journal of the American Helicopter Society 1990; 36(3):23-35.
- [8] Kim BC, Potter K, Weaver PM. Continuous tow shearing for manufacturing variable angle tow composites. Composites Part-A 2012; 43:1347-56.

- [9] Jones RM. Mechanics of composite materials. New York: Hemisphere Publishing Corp.; 1975.